平成 19 年 6 月 8 日

単位球面上に $\triangle APC$ があり、$\angle P = \frac{\pi}{2}$ であるとき、$\tan \widehat{AP}$ を $\widehat{AC}$ および $\angle A$ を使って表せ。ただし、いずれの弧角も $\frac{\pi}{2}$ でないものとする。

解答

球面三角形の辺の余弦法則より、次の 2 式が成り立つ。

$$\cos \widehat{AC} = \cos \widehat{AP} \cos \widehat{CP} \tag{1}$$

$$\cos \widehat{CP} = \cos \widehat{AC} \cos \widehat{AP} + \sin \widehat{AC} \sin \widehat{AP} \cos \angle A \tag{2}$$

そして (2) を (1) に代入すると、$\widehat{AP}$ についての次の方程式が得られる。

$$\cos \widehat{AC} \cos^2 \widehat{AP} + \sin \widehat{AC} \cos \angle A \cos \widehat{AP} \sin \widehat{AP} - \cos \widehat{AC} = 0$$

また、2 倍角の定理から、次の 2 式が得られる。

$$\cos^2 \widehat{AP} = \frac{1}{2}(\cos 2\widehat{AP} + 1) \tag{3}$$

$$\cos \widehat{AP} \sin \widehat{AP} = \frac{1}{2} \sin 2\widehat{AP} \tag{4}$$

これらを先程得た方程式に代入して、

$$\frac{1}{2} \cos \widehat{AC}(\cos 2\widehat{AP} + 1) + \frac{1}{2} \sin \widehat{AC} \cos \angle A \sin 2\widehat{AP} - \cos \widehat{AC} = 0$$

全体を 2 倍して整理すると、

$$\cos \widehat{AC} \cos 2\widehat{AP} + \sin \widehat{AC} \cos \angle A \sin 2\widehat{AP} - \cos \widehat{AC} = 0$$

ここで $\tan 2\widehat{AP} = \frac{\cos \widehat{AC}}{\gamma}$ となるような実数 γ を導入すると、

$$\gamma \sin 2\widehat{AP} + \sin \widehat{AC} \cos \angle A \sin 2\widehat{AP} - \cos \widehat{AC} = 0 \tag{5}$$

$$\sin 2\widehat{AP} = \frac{\cos \widehat{AC}}{\gamma + \sin \widehat{AC} \cos \angle A} \tag{6}$$

$$\text{また、} \cos 2\widehat{AP} = \frac{\gamma}{\gamma + \sin \widehat{AC} \cos \angle A} \tag{7}$$

$\cos^2 2\widehat{AP} + \sin^2 2\widehat{AP} = 1$ の関係から、

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \cos^2\widehat{AC} &= (\gamma + \sin\widehat{AC}\cos\angle A)^2 & (8) \\ 2\gamma\sin\widehat{AC}\cos\angle A &= \cos^2\widehat{AC} - \sin^2\widehat{AC}\cos^2\angle A & (9) \\ \gamma &= \frac{\cos^2\widehat{AC} - \sin^2\widehat{AC}\cos^2\angle A}{2\sin\widehat{AC}\cos\angle A} & (10) \end{aligned}$$

以上より、

$$\tan 2\widehat{AP} = \frac{2\cos\widehat{AC}\sin\widehat{AC}\cos\angle A}{\cos^2\widehat{AC} - \sin^2\widehat{AC}\cos^2\angle A}$$

ここで、左辺は次のように展開できる。

$$\tan 2\widehat{AP} = \frac{2\cos\widehat{AP}\sin\widehat{AP}}{\cos^2\widehat{AP} - \sin^2\widehat{AP}}$$

一方、右辺の分子と分母を $\cos^2\widehat{CP}$ で割ると、

$$\frac{2\frac{\cos\widehat{AC}}{\cos\widehat{CP}}\frac{\sin\widehat{AC}\cos\angle A}{\cos\widehat{CP}}}{\frac{\cos^2\widehat{AC}}{\cos^2\widehat{CP}} - \frac{\sin^2\widehat{AC}\cos^2\angle A}{\cos^2\widehat{CP}}}$$

$\cos\widehat{AC} = \cos\widehat{AP}\cos\widehat{CP}$ より、

$$\frac{2\cos\widehat{AP}\frac{\sin\widehat{AC}\cos\angle A}{\cos\widehat{CP}}}{\cos^2\widehat{AP} - \frac{\sin^2\widehat{AC}\cos^2\angle A}{\cos^2\widehat{CP}}}$$

結果として次の等式が成り立つ。

$$\tan 2\widehat{AP} = \frac{2\cos\widehat{AP}\sin\widehat{AP}}{\cos^2\widehat{AP} - \sin^2\widehat{AP}} = \frac{2\cos\widehat{AP}\frac{\sin\widehat{AC}\cos\angle A}{\cos\widehat{CP}}}{\cos^2\widehat{AP} - \frac{\sin^2\widehat{AC}\cos^2\angle A}{\cos^2\widehat{CP}}}$$

この結果から、$\sin\widehat{AP} = \frac{\sin\widehat{AC}\cos\angle A}{\cos\widehat{CP}}$ であることがわかる。
したがって、

$$\begin{aligned} \tan\widehat{AP} &= \frac{\sin\widehat{AP}}{\cos\widehat{AP}} & (11) \\ &= \frac{\frac{\sin\widehat{AC}\cos\angle A}{\cos\widehat{CP}}}{\frac{\cos\widehat{AC}}{\cos\widehat{CP}}} & (12) \\ &= \tan\widehat{AC}\cos\angle A & (13) \end{aligned}$$

よって、$\tan\widehat{AP} = \tan\widehat{AC}\cos\angle A$.