球面三角形についての問題

M.Kakumoto

平成 18 年 1 月 1 日

O を中心とする半径 R の球面がある。その面上の三点 A,B,C を頂点とする球面三角形を考え、それぞれの頂点における頂角を $\angle A$,$\angle B$,$\angle C$、それに対する弧角を $\angle a$,$\angle b$,$\angle c$ とし、簡単のために、すべての弧角の大きさは $\dfrac{\pi}{2}$ 以下であるとする。

今、$\widehat{AB}$ 上に 点 P があるとき、

1. $\widehat{CP}$ の長さを、$\angle APC$ を使って表せ。
2. $\widehat{CP}$ の長さが最小となるような、$\angle APC$ の大きさはいくらか。
3. $\widehat{CP}$ の長さが最小となるときの、$\widehat{AP}$ および $\widehat{PB}$ の長さはいくらか。
4. $\widehat{CP}$ の長さが最小となるときの、$\angle ACP$ および $\angle BPC$ の大きさはいくらか。

ただし全ての弧は、その端点を通る大円の小弧を意味するものとする。

1.

球面三角形の正弦法則より、

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\angle COP}{\sin\angle A} &= \frac{\sin\angle b}{\sin\angle APC} \\
\sin\angle COP &= \frac{\sin\angle A\sin\angle b}{\sin\angle APC} \\
\angle COP &= \sin^{-1}\frac{\sin\angle A\sin\angle b}{\sin\angle APC}
\end{aligned}$$

したがって、$\overparen{CP}$ の長さは、

$$R\sin^{-1}\frac{\sin\angle A\sin\angle b}{\sin\angle APC}$$

2.

$\overparen{CP}$ の長さを最小にするには、$\angle COP$ の大きさを最小にすればよい。
すなわち、$\sin\angle APC$ を最大にすればよいので、求める $\angle APC$ の大きさは $\frac{\pi}{2}$

3.

球面三角形の辺の余弦法則より、

$$\begin{aligned}\cos\angle b &= \cos\angle AOP\cos\angle COP+\sin\angle AOP\sin\angle COP\cos\frac{\pi}{2}\\ &= \cos\angle AOP\cos\angle COP\\ \cos\angle AOP &= \frac{\cos\angle b}{\cos\angle COP}\\ \angle AOP &= \cos^{-1}\frac{\cos\angle b}{\cos\angle COP}\end{aligned}$$

したがって、求める $\widehat{AP}$ の長さは、

$$R\cos^{-1}\frac{\cos\angle b}{\cos\angle COP}$$

同様にして、$\widehat{PB}$ の長さは、

$$R\cos^{-1}\frac{\cos\angle a}{\cos\angle COP}$$

4.

球面三角形の正弦法則より、

$$\begin{aligned}\frac{\sin\angle b}{\sin\frac{\pi}{2}} &= \frac{\sin\angle AOP}{\sin\angle ACP}\\ \sin\angle ACP &= \frac{\sin\angle AOP}{\sin\angle b}\\ \angle ACP &= \sin^{-1}\frac{\sin\angle AOP}{\sin\angle b}\end{aligned}$$

したがって、求める $\angle ACP$ の大きさは、

$$\sin^{-1}\frac{\sin\angle AOP}{\sin\angle b}$$

同様にして、$\angle BCP$ の大きさは、

$$\sin^{-1}\frac{\sin\angle POB}{\sin\angle a}$$